

Θεωρία Αριθμών

Δευτέρα 10-9-2018

- (1 μονάδα) Πόσοι ακέραιοι μεταξύ του 312 και του 2112 είναι πρώτοι με τον 50;
- (1 μονάδα) Έστω $n \geq 2$ φυσικός. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραιος a με τάξη modulo n ίση με $n - 1$. Δείξτε ότι ο n είναι πρώτος.
- (2 μονάδες) Έστω a υπόλοιπο της διαίρεσης του 17^{290} με το 65 και b το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο του $2017^{(2019^{2020})}$. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης
$$ax - by = 111,$$
ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.
- (1 μονάδα) Έστω n, m θετικοί ακέραιοι με $n, m \geq 2$. Πότε ο n λέγεται αρχική ρίζα mod m ; Βρείτε όλες τις αρχικές ρίζες mod 22.
- (2 μονάδες) Βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς μεταξύ του 1200 και του 2000 τέτοιους ώστε διαιρούμενοι με τους 5, 7, 11 να δίνουν αντίστοιχα υπόλοιπα 3, 4, 1.
- (1 μονάδα) Έστω a, b, c μη μηδενικοί ακέραιοι. Υποθέτουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a, b είναι 1, ότι ο a διαιρεί το c και ότι ο b διαιρεί το c . Δείξτε ότι ο ab διαιρεί το c .
- (2 μονάδες)
 - (1) Αποδείξτε ότι ο 53 είναι πρώτος.
 - (2) Αποδείξτε ότι το 3 είναι αρχική ρίζα mod 53, ενώ το 7 δεν είναι.
 - (3) Βρείτε όλους τους φυσικούς x ώστε $x \leq 70$ και $\text{ord}_{53}(3^x) = 26$.
 - (4) Βρείτε όλους τους φυσικούς y ώστε $3^{4y} \equiv 1 \pmod{53}$.

Καλή επιτυχία.